ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 24, № 127 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-324-332

УДК 517.937

Об основном свойстве комплексной операторной экспоненциальной функции комплексного операторного аргумента

Василий Ильич ФОМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3846-4882, e-mail: vasiliyfomin@bk.ru

About a complex operator exponential function of a complex operator argument main property

Vasiliy I. FOMIN

Tambov State Technical University

106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3846-4882, e-mail: vasiliyfomin@bk.ru

Аннотация. В банаховом пространстве E рассматриваются операторные функции e^A, $\sin B$, $\cos B$ операторного аргумента из банаховой алгебры ограниченных линейных операторов, действующих из E в E. Для тригонометрических операторных функций $\sin B$, $\cos B$ выводятся формулы для синуса и косинуса суммы аргументов, аналогичные скалярному случаю. При доказательстве этих формул используется произведение рядов с операторными членами в форме Коши. Приводится основное операторное тригонометрическое тождество. Для комплексной операторной экспоненциальной функции e^Z операторного аргумента Z из банаховой алгебры комплексных операторов доказывается с помощью формул для косинуса и синуса суммы основное свойство показательной функции. Рассматриваются операторные функции e^{At}, $\sin Bt$, $\cos Bt$, e^{Zt} действительного аргумента $t \in (-\infty, \infty)$. На эти функции переносятся факты, изложенные для операторных функций операторного аргумента. В частности, приводится групповое свойство операторной экспоненты e^{Zt}. Указывается правило дифференцирования функции e^{Zt}. Отмечается, что перечисленные выше операторные функции действительного аргумента t используются при построении общего решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве

Ключевые слова: банахово пространство; банахова алгебра; операторная экспоненциальная функция; операторные тригонометрические функции; основное свойство операторной экспоненциальной функции; произведение операторных рядов в форме Коши; основное операторное тригонометрическое тождество

Для цитирования: *Фомин В.И.* Об основном свойстве комплексной операторной экспоненциальной функции комплексного операторного аргумента // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 127. С. 324–332. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-324-332.

Abstract. Operator functions e^A, $\sin B$, $\cos B$ of the operator argument from the Banach algebra of bounded linear operators acting from E to E are considered in the Banach space E. For trigonometric operator functions $\sin B$, $\cos B$, formulas for the sine and cosine of the sum of the arguments are derived that are similar to the scalar case. In the proof of these formulas, the composition of ranges with operator terms in the form of Cauchy is used. The basic operator trigonometric identity is given. For a complex operator exponential function e^Z of an operator argument Z from the Banach algebra of complex operators, using the formulas for the cosine and sine of the sum, the main property of the exponential function is proved. Operator functions e^{At}, $\sin Bt$, $\cos Bt$, e^{Zt} of a real argument $t \in (-\infty, \infty)$ are considered. The facts stated for the operator functions of the operator argument are transferred to these functions. In particular, the group property of the operator exponent e^{Zt} is given. The rule of differentiation of the function e^{Zt} is indicated. It is noted that the operator functions of the real argument t listed above are used in constructing a general solution of a linear n th order differential equation with constant bounded operator coefficients in a Banach space

Keywords: Banach space; Banach algebra; exponential operator function; trigonometric operator functions; exponential operator function main property; the composition of operator ranges in the form of Cauchy; basic operator trigonometric identity

For citation: Fomin V.I. Ob osnovnom svoystve kompleksnoy operatornoy eksponencial'noy funkcii kompleksnogo operatornogo argumenta [About a complex operator exponential function of a complex operator argument main property]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 127, pp. 324–332. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-324-332. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Известно [1–4], что при построении общего решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве используются экспоненциальная и тригонометрические операторные функции действительного аргумента, свойства которых следуют из соответствующих свойств комплексной операторной экспоненциальной функции e^Z комплексного операторного аргумента Z. В связи с этим актуальна задача детального изучения свойств функции e^Z. В данной работе предлагается доказательство основного свойства экспоненциальной функции: $e^{Z_1+Z_2} = e^{Z_1}e^{Z_2}$, использующее тот факт, что сумма ряда, являющегося произведением двух абсолютно сходящихся рядов с операторными членами, равна произведению сумм перемножаемых рядов.

1. Основные понятия

Пусть E — банахово пространство; $L(E)$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E. В целях ясности дальнейшего изложения материала будем обозначать сумму сходящегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n$, где $F_n \in L(E)$, $n \in N \cup \{0\}$, выражением $(s)\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n$. Рассмотрим функции f, g, $h : L(E) \to L(E)$, определяемые суммами абсолютно сходящихся рядов [5, с. 127, с. 132]:

$$f(A) = e^A = (s)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \tag{1.1}$$

$$g(B) = \sin B = (s)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{1.2}$$

$$h(B) = \cos B = (s)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B^{2n}}{(2n)!}. \tag{1.3}$$

Заметим, что $e^O = I$, $\sin O = O$, $\cos O = I$, кроме того,

$$\sin(-B) = -\sin B, \quad \cos(-B) = \cos B, \quad \forall B \in L(E). \tag{1.4}$$

Известно [6, с. 41], что при любых $A_1, A_2 \in L(E)$, удовлетворяющих условию $A_1A_2 = A_2A_1$, для операторной экспоненциальной функции (1.1) справедливо равенство

$$e^{A_1+A_2} = e^{A_1} \cdot e^{A_2}. \tag{1.5}$$

В дальнейшем нам потребуются два соотношения для операторных тригонометрических функций (1.2), (1.3).

Лемма 1.1. *Для любых* $B_1, B_2 \in L(E)$, *удовлетворяющих условию*

$$B_1B_2 = B_2B_1, \tag{1.6}$$

справедливы формулы

$$\sin(B_1 + B_2) = \sin B_1 \cos B_2 + \cos B_1 \sin B_2, \tag{1.7}$$

$$\cos(B_1 + B_2) = \cos B_1 \cos B_2 - \sin B_1 \sin B_2. \tag{1.8}$$

Доказательство. Покажем справедливость равенства (1.7) (формула (1.8) доказывается аналогично). Рассмотрим ряд, сумма которого определяет левую часть формулы (1.7):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (B_1 + B_2)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{1.9}$$

В силу условия (1.6) можно применить бином Ньютона:

$$\begin{gathered}(B_1 + B_2)^{2n+1} = \sum_{s=0}^{2n+1} C_{2n+1}^s B_1^{2n+1-s} B_2^s = \\ = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} B_1^{2n-2k+1} B_2^{2k} + \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} B_1^{2n-2k} B_2^{2k+1}.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{(2n+1)!}C_{2n+1}^{2k} = \frac{1}{(2n-2k+1)!(2k)!}, \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{(2n+1)!}C_{2n+1}^{2k+1} = \frac{1}{(2n-2k)!(2k+1)!}. \tag{1.12}$$

В силу соотношений (1.9)–(1.12)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(B_1+B_2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{B_1^{2n-2k+1}B_2^{2k}}{(2n-2k+1)!(2k)!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{B_1^{2n-2k}B_2^{2k+1}}{(2n-2k)!(2k+1)!}\right]. \tag{1.13}$$

Рассмотрим ряды, порождающие правую часть равенства (1.7):

$$P_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n B_1^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad P_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,B_2^{2n}}{(2n)!},$$

$$P_3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,B_1^{2n}}{(2n)!},\quad P_4=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,B_2^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Используя произведение рядов в форме Коши, получаем:

$$P_1P_2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l+k=n}\frac{(-1)^l B_1^{2l+1}}{(2l+1)!}\cdot\frac{(-1)^k\,B_2^{2k}}{(2k)!}\right),$$

$$P_3P_4=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l+k=n}\frac{(-1)^l\,B_1^{2l}}{(2l)!}\cdot\frac{(-1)^k\,B_2^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$$

или

$$P_1P_2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_1^{2n-2k+1}B_2^{2k}}{(2n-2k+1)!(2k)!}\right),$$

$$P_3P_4=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_1^{2n-2k}B_2^{2k+1}}{(2n-2k)!(2k+1)!}\right).$$

Тогда

$$P_1P_2+P_3P_4=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_1^{2n-2k+1}B_2^{2k}}{(2n-2k+1)!(2k)!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{B_1^{2n-2k}B_2^{2k+1}}{(2n-2k)!(2k+1)!}\right). \tag{1.14}$$

Из соотношений (1.13), (1.14) следует равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(B_1+B_2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=P_1P_2+P_3P_4.$$

Тогда в силу того, что сумма ряда, являющегося произведением двух абсолютно сходящихся рядов, равна произведению сумм перемножаемых рядов, получаем:

$$(s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(B_1+B_2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\left((s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n B_1^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left((s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,B_2^{2n}}{(2n)!}\right)+$$

$$+\left((s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,B_1^{2n}}{(2n)!}\right)\left((s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,B_2^{2n+1}}{(2n+1)!}\right),$$

т. е. в силу равенств (1.2), (1.3) $\sin(B_1+B_2)=\sin B_1\cos B_2+\cos B_1\sin B_2$. □

В силу равенств (1.7), (1.8)

$$\sin 2B = 2\sin B\cos B;\quad \cos 2B=\cos^2 B-\sin^2 B.$$

Из соотношений (1.4), (1.7), (1.8) получаем формулы

$$\sin(B_1-B_2)=\sin B_1\cos B_2-\cos B_1\sin B_2;$$

$$\cos(B_1-B_2)=\cos B_1\cos B_2+\sin B_1\sin B_2.$$

Тем же способом, каким установлены соотношения (1.7), (1.8), доказываются другие формулы операторной тригонометрии, например, основное операторное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 B+\cos^2 B=I,\quad \forall B\in L(E). \tag{1.15}$$

Можно ввести понятия тангенса и котангенса операторного аргумента. Пусть

$$D_1=\big\{B\in L(E)|\exists\ \cos^{-1}B\in L(E)\big\},$$

$$D_2=\big\{B\in L(E)|\exists\ \sin^{-1}B\in L(E)\big\},$$

где $\cos^{-1}B=(\cos B)^{-1}$ и $\sin^{-1}B=(\sin B)^{-1}$ — обратные операторы соответственно для операторов $\cos B$ и $\sin B$. Тогда можно рассмотреть функции $\varphi: D_1\to L(E)$, $\psi: D_2\to L(E)$, определяемые формулами

$$\varphi(B)=\mathrm{tg}B=\sin B\cos^{-1}B,$$

$$\psi(B)=\mathrm{ctg}B=\cos B\sin^{-1}B.$$

2. Основные результаты

Рассмотрим банахову алгебру комплексных операторов [7]

$$C_{L(E)} = [L(E)]^2 = L(E) \times L(E) = \{Z = (A, B) | A, B \in L(E)\},$$

которую удобно представить в виде

$$C_{L(E)} = \{Z = A + JB | A, B \in L(E)\},$$

где $J = (O, I)$ — мнимая операторная единица. Напомним, что операция умножения в $C_{L(E)}$ задаётся формулой

$$(A_1 + JB_1)(A_2 + JB_2) = A_1A_2 - B_1B_2 + J(A_1B_2 + B_1A_2).$$

Комплексная операторная экспоненциальная функция $w : C_{L(E)} \to C_{L(E)}$ определяется равенством

$$w(Z) = e^Z = e^{A+JB} = e^A(\cos B + J \sin B), \tag{2.1}$$

в частности, при $A = O$, получаем операторную формулу Эйлера

$$e^{JB} = \cos B + J \sin B. \tag{2.2}$$

Докажем основное свойство экспоненциальной функции (2.1).

Теорема 2.1. *Для любых* $Z_1 = A_1+JB_1$, $Z_2 = A_2+JB_2 \in C_{L(E)}$, *удовлетворяющих условиям*

$$A_1A_2 = A_2A_1, \quad B_1B_2 = B_2B_1, \quad A_2B_1 = B_1A_2$$

справедливо равенство

$$e^{Z_1+Z_2} = e^{Z_1}e^{Z_2}. \tag{2.3}$$

Доказательство. В силу условия $A_1A_2 = A_2A_1$ справедливо равенство (1.5). Из условия $B_1B_2 = B_2B_1$ следуют формулы (1.7), (1.8). Тогда, используя условие $A_2B_1 = B_1A_2$, получаем:

$$e^{Z_1}e^{Z_2} = e^{A_1}(\cos B_1 + J \sin B_1)e^{A_2}(\cos B_2 + J \sin B_2) =$$

$$= e^{A_1+A_2} [\cos B_1 \cos B_2 - \sin B_1 \sin B_2 + J(\sin B_1 \cos B_2 + \cos B_1 \sin B_2)] =$$

$$= e^{A_1+A_2} [\cos(B_1 + B_2) + J \sin(B_1 + B_2)] = e^{A_1+A_2+\mathrm{I}(B_1+B_2)} = e^{Z_1+Z_2}.$$

□

В силу равенств (1.4), (2.2)

$$e^{-JB} = \cos B - J \sin B. \tag{2.4}$$

Заметим, что $J^{-1} = -J$. Тогда из соотношений (2.2), (2.4) следуют формулы

$$\sin B = -\frac{J}{2}\left(e^{JB} - e^{-JB}\right); \tag{2.5}$$

$$\cos B = \frac{1}{2}\left(e^{JB} + e^{-JB}\right). \tag{2.6}$$

Основное операторное тригонометрическое тождество (1.15) можно доказать, используя равенства (2.3), (2.5), (2.6).

Пусть $A, B \in L(E)$; A, B фиксированы. Рассмотрим функции μ, ν, $\kappa : R \to L(E)$, определяемые равенствами

$$\mu(t) = e^{At} = (s)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \tag{2.7}$$

$$\nu(t) = \sin Bt = (s)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1} B^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{2.8}$$

$$\kappa(t) = \cos Bt = (s)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n} B^{2n}}{(2n)!}. \tag{2.9}$$

В силу равенства (1.5) для операторной экспоненты (2.7) выполняется известное групповое свойство [6, с. 41]

$$e^{A(t+\tau)} = e^{At} e^{A\tau}, \quad \forall t, \tau \in R.$$

В силу тождества (1.15) получаем известное соотношение [8]

$$\sin^2 Bt + \cos^2 Bt = I, \quad \forall t \in R.$$

Для операторов $B_1, B_2 \in L(E)$, удовлетворяющих условию (1.6) получаем, в силу равенств (1.7), (1.8), соотношения

$$\sin\left[(B_1 + B_2)t\right] = \sin B_1 t \cos B_2 t + \cos B_1 t \sin B_2 t,$$

$$\cos\left[(B_1 + B_2)t\right] = \cos B_1 t \cos B_2 t - \sin B_1 t \sin B_2 t.$$

Пусть $Z = A + JB \in C_{L(E)}$; Z фиксирован. Рассмотрим функцию $\chi(t) : R \to C_{L(E)}$, определяемую равенством

$$\chi(t) = e^{Zt} = e^{(A+JB)t} = e^{At}(\cos Bt + J \sin Bt). \tag{2.10}$$

Если действительная и мнимая части оператора Z коммутируют:

$$AB = BA, \tag{2.11}$$

то в силу доказанной выше теоремы

$$e^{Z(t+\tau)} = e^{Zt}e^{Z\tau}, \quad \forall t, \tau \in R.$$

Напомним [6, с. 41], что производная операторной экспоненты (2.7) выражается формулой

$$\left(e^{At}\right)' = Ae^{At}.$$

Известно [7], что при выполнении условия (2.11) для производной комплексной операторной экспоненты (2.10) справедливо равенство

$$\left(e^{Zt}\right)' = Ze^{Zt}.$$

Список литературы

[1] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:5 (2005), 656–660.

[2] В. И. Фомин, “О случае кратных корней характеристического операторного многочлена линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **43**:5 (2007), 710–713.

[3] В. И. Фомин, “Об одном семействе решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве”, *Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика*, **6**:42 (2018), 382–384.

[4] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **24**:126 (2019), 237–243.

[5] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980.

[6] Ю. Л. Далецкий , М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970.

[7] В. И. Фомин, “О банаховой алгебре комплексных операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 813–823, DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823.

[8] В. И. Фомин, “Об основном операторном тригонометрическом тождестве”, *Современные методы теории краевых задач*, Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXX» (Воронеж, 3–9 мая, 2019), Материалы международной конференции, Издательский дом ВГУ, Воронеж, 2019, 284–285.

References

[1] V. I. Fomin, “On the general solution of a linear nth-order differential equation with constant bounded operator coefficients in a Banach space”, *Differential Equations*, **41**:5 (2005), 687–692.

[2] V. I. Fomin, “On the case of multiple roots of the characteristic operator polynomial of an nth-order linear homogeneous differential equation in a Banach space”, *Differential Equations*, **43**:5 (2007), 732–735.

[3] V. I. Fomin, “About a solutions family of a linear homogeneous differential equation of the nth-order in a Banach space”, *Actual Areas of Research of the 21th Century: Theory and Practice*, **6**:42 (2018), 382–384 (In Russian).

[4] V. I. Fomin, “About the general solution of a linear homogeneous differential equation in a Banach space in the case of complex characteristic operators”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:126 (2019), 237–243 (In Russian).

[5] V. A. Trenogin, *Functional Analysis*, Nauka, Moscow, 1980 (In Russian).

[6] Y. L. Daleckiy , M. G. Kreyn, *Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space*, Nauka, Moscow, 1970 (In Russian).

[7] V. I. Fomin, “About a complex operator Banach algebra”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 813–823, DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823 (In Russian).

[8] V. I. Fomin, “About the main operator trigonometric identity”, *Modern Methods of the Theory of Boundary Value Problems*, Voronezh Spring Mathematical School «Pontryagin Readings – XXX» (Voronezh, May 3–9, 2019), Materials of the International Conference, VSU Publishing House, Voronezh, 2019, 284–285 (In Russian).

Информация об авторе

Фомин Василий Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технической механики и деталей машин. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Information about the author

Vasiliy I. Fomin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Technical Mechanic and Machine Part Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Поступила в редакцию 15 мая 2019 г.
Поступила после рецензирования 26 июня 2019 г.
Принята к публикации 23 августа 2019 г.

Received 15 May 2019
Reviewed 26 June 2019
Accepted for press 23 August 2019